

(1) 由题知,

$$(x^2 + 2x + 1)^2 = (x + 1)^4.$$

故答案为:  $(x + 1)^4$ .

(2) 令  $y = x^2 - 4x$ ,

则原式 =  $y(y + 8) + 16$

$$= y^2 + 8y + 16$$

$$= (y + 4)^2$$

$$= (x^2 - 4x + 4)^2$$

$$= (x - 2)^4.$$

(3) 令  $x^2 + y^2 = m$ ,

则由  $(x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1) = 63$  得,  
 $(m + 1)(m - 1) = 63$ ,

解得  $m = \pm 8$ ,

因为  $m = x^2 + y^2 \geq 0$ ,

所以  $m = 8$ ,

则  $x^2 + y^2 = 8$ .

25

去分母, 得  $(x + 1)(x - 1) - x(x + 2) = a$ , 解

$$\text{得 } x = -\frac{a+1}{2}. \because \text{原方程的解为正数, 即 } x > 0,$$

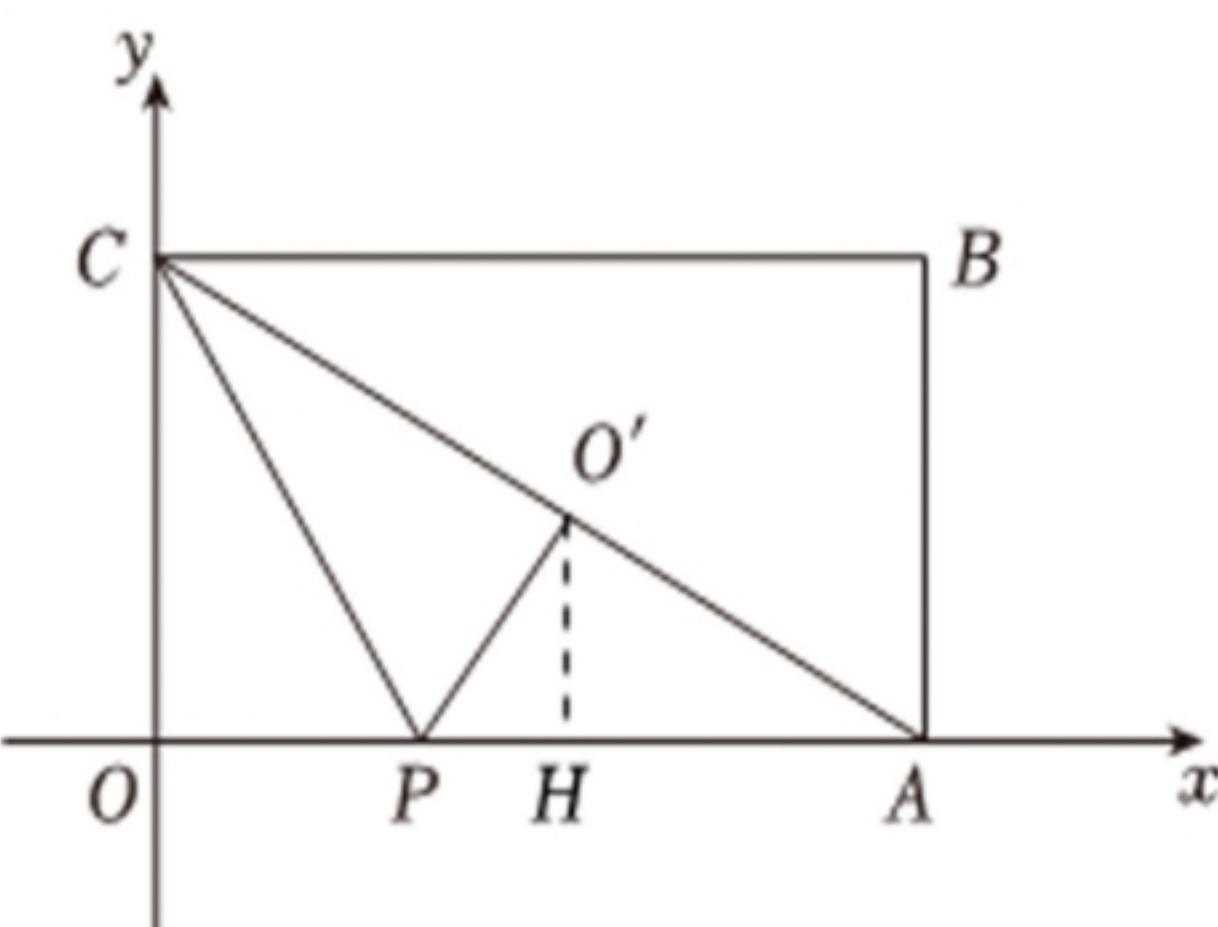
$$\therefore -\frac{a+1}{2} > 0, \text{解得 } a < -1. \text{ 又 } x + 2 \neq 0, \text{ 即}$$

$$x \neq -2, \therefore -\frac{a+1}{2} \neq -2, \text{解得 } a \neq 3. \therefore a < -1 \text{ 且}$$

$$a \neq -3.$$

26

(1) 过  $O'$  作  $O'H \perp OA$  于  $H$ , 如:



∴ 四边形  $OABC$  是矩形,  $OA = 4$ ,  $OC = 3$ ,

$$\therefore AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

将矩形  $OABC$  沿着  $PC$  对折, 点  $O$  的对应点为  $O'$ ,

$$\therefore CO' = OC = 3, O'P = OP,$$

$$\angle CO'P = \angle COP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AO'P = 90^\circ, O'A = AC - CO' = 5 - 3 = 2,$$

$$\therefore O'P^2 + O'A^2 = AP^2, \text{ 即 } OP^2 + 2^2 = (4 - OP)^2,$$

$$\text{得 } OP = \frac{3}{2},$$

$$\therefore P(\frac{3}{2}, 0), O'P = \frac{3}{2}, AP = 4 - OP = \frac{5}{2},$$

$$\therefore 2S'_{\triangle APO} = AP \cdot O'H = O'A \cdot O'P,$$

$$\therefore O'H = \frac{O'A \cdot O'P}{AP} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{6}{5},$$

$$\therefore PH = \sqrt{O'P^2 - O'H^2} = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - (\frac{6}{5})^2} = \frac{9}{10},$$

$$\therefore OH = OP + PH = \frac{3}{2} + \frac{9}{10} = \frac{12}{5},$$

$$\therefore O'(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}),$$

设直线  $PO'$  所对应的函数表达式为  $y = kx + b$ ,

$$\begin{cases} \frac{12}{5}k + b = \frac{6}{5} \\ \frac{3}{2}k + b = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } PO' \text{ 所对应的函数表达式为 } y = \frac{4}{3}x - 2;$$

(2) ∵  $BC \parallel OP$ ,

$$\therefore \angle BCP = \angle CPO,$$

将矩形  $OABC$  沿着  $PC$  对折, 点  $O$  的对应点为  $O'$ ,

$$\therefore \angle CPO' = \angle CPO,$$

$$\therefore \angle BCP = \angle CPO',$$

$$\therefore BP = BC = 4,$$

$$\therefore AP = \sqrt{BP^2 - AB^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore OP = OA + AP = 4 + \sqrt{7},$$

$$\therefore P(4 + \sqrt{7}, 0),$$

设直线  $l$  所对应的函数表达式为  $y = mx + n$ , 把

$$P(4 + \sqrt{7}, 0), B(4, 3) \text{ 代入得:}$$

$$\begin{cases} (4 + \sqrt{7})m + n = 0 \\ 4m + n = 3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} m = -\frac{3\sqrt{7}}{7} \\ n = \frac{21 + 12\sqrt{7}}{7} \end{cases}$$

∴ 直线  $l$  所对应的函数表达式为

$$y = -\frac{3\sqrt{7}}{7}x + \frac{21 + 12\sqrt{7}}{7}.$$

27

(1) ∵ 反比例函数  $y = \frac{k_2}{x}$  过点  $M(2, 8)$ ,

$$\therefore k_2 = 2 \times 8 = 16,$$

∴ 反比例函数的解析式为  $y = \frac{16}{x}$ ,

设  $N(m, \frac{16}{m})$ ,

∵  $M(2, 8)$ ,

$$\therefore S_{\triangle OMB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8,$$

∴ 四边形  $OANM$  的面积为 38,

∴ 四边形  $ABMN$  的面积为 30,

$$\therefore \frac{1}{2}(8 + \frac{16}{m}) \cdot (m - 2) = 30,$$

解得  $m_1 = 8, m_2 = -\frac{1}{2}$  (舍去),

∴  $N(8, 2)$ ,

∴ 一次函数  $y = k_1x + b$  的图象经过点  $M, N$ ,

$$\begin{cases} 2k_1 + b = 8 \\ 8k_1 + b = 2 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k_1 = -1 \\ b = 10 \end{cases},$$

∴ 一次函数的解析式为  $y = -x + 10$ ;

(2) 与直线  $MN$  平行, 且

在第三象限与反比例函

数  $y = \frac{16}{x}$  有唯一公共

点  $P$  时,  $\triangle PMN$  的面

积最小,

设与直线  $MN$  平行的直

线的关系式为

$y = -x + n$ , 当与

$y = \frac{16}{x}$  在第三象限有

唯一公共点时,

有方程  $-x + n = \frac{16}{x} (x < 0)$  唯一解,

即  $x^2 - nx + 16 = 0$  有两个相等的实数根,

$$\therefore n^2 - 4 \times 1 \times 16 = 0,$$

解得  $n = -8$  或  $x = 8$  (舍去),

∴ 与直线  $MN$  平行的直线的关系式为  $y = -x - 8$ ,

∴ 方程  $-x - 8 = \frac{16}{x}$  的解为  $x = -4$  或  $x = 4$  (舍去),  
 经检验,  $x = -4$  是原方程的解,

$$\text{当 } x = -4 \text{ 时, } y = \frac{16}{-4} = -4,$$

∴ 点  $P(-4, -4)$ ,

如图, 过点  $P$  作  $AN$  的垂线, 交  $NA$  的延长线于点  $Q$ , 交  $y$

轴于点  $D$ , 延长  $MB$  交  $PQ$  于点  $C$ , 由题意得,

$$PD = 4, DQ = 8, CD = 2, MC = 8 + 4 = 12,$$

$$NQ = 2 + 4 = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle PMN} = S_{\triangle MPC} + S_{\text{梯形 } MCQN} - S_{\triangle PNQ}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 12 + \frac{1}{2}(12 + 6) \times 6 - \frac{1}{2} \times 12 \times 6$$

$$= 36 + 54 - 36$$

$$= 54,$$

答: 点  $P(-4, -4)$ ,  $\triangle PMN$  面积的最小值为 54.